Sesión de iniciación a problemas de olimpiadas

8 de marzo de 2022

Comenzamos con una sesión de discusión sobre los siguientes problemas:

- ¿Cuál es el menor número de cortes necesario para trocear un cubo 3x3x3 en 27 subcubos 1x1x1?
- Problema similar para un cubo d-dimensional $n_1 \times n_2 \times \times n_d$?
- Cortes en tabletas de chocolate: juegos imparciales, partidarios y repartos equitativos.

La segunda parte se dedicó a la resolución de los siguientes problemas:

1. Sea $S = \{1, \ldots, 8\}$ y $\mathcal{M}$ el conjunto de los subconjuntos de S con cuatro elementos distintos de tal modo que si $A, B \in \mathcal{M}$ son distintos entonces su intersección contiene, a lo más, dos elementos. ¿Cuál es el mayor cardinal posible para $\mathcal{M}$?

2. Probar que entre 10 números enteros positivos consecutivos cualesquiera siempre hay uno que es primo relativo con todos los demás.

3. Sea A un conjunto finito de números reales y $f\colon A \to A$ una función tal que $|f(x)-f(y)|$ para todo $x, y \in A$. Prueba que f no es sobreyectiva y que tiene exactamente un punto fijo, es decir, hay un único punto $a \in A$ tal que $f(a) = a$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(f(x)) = \frac{x^9}{(x^2+1)(x^6+x^4+2x^2+1)}.$$
Prueba que f tiene un único punto fijo.

5. Sean a, b y c las longitudes de las caras de un triángulo. Dados x, y y z tales que $ax + by + cz = 0$, prueba que
$$xy + xz + yz \le 0.$$